

Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

## SUBIECTUL I

(30 de puncte)

|    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|----|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|    | Pentru itemii de mai jos, scrieți pe foaia de examen litera corespunzătoare răspunsului corect.                                                                                                                                                                                                                     |
| 5p | 1. Valoarea numărului complex $1 + i + i^2 + \dots + i^{2025}$ este:<br>A. $-1 + i$ B. 0 C. $-i$ D. $1 + i$ .                                                                                                                                                                                                       |
| 5p | 2. Se consideră funcția bijectivă $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definită prin $f(x) = x^3 + 2x - 3$ , ce are inversa $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Atunci $g(0)$ este:<br>A. 2 B. 0 C. 1 D. $-3$ .                                                                                          |
| 5p | 3. Se consideră în mulțimea numerelor complexe următoarea ecuație: $3 - z =  z ^2 - i$ . Atunci numărul soluțiilor ecuației este egal cu:<br>A. 2 B. 1 C. 4 D. 0.                                                                                                                                                   |
| 5p | 4. Se consideră mulțimea $\mathcal{M}_2(\{-1, 0, 1\})$ a tuturor matricelor pătratice de ordinul 2, cu elemente din mulțimea $\{-1, 0, 1\}$ . Atunci probabilitatea ca o matrice aleasă aleator din această mulțime să fie simetrică este:<br>A. $\frac{1}{9}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{2}{9}$ . |
| 5p | 5. În sistemul cartezian de coordonate $xOy$ se consideră punctele $A(1, 3)$ , $B(5, m)$ , $C(2, -1)$ și $D(-1, 1)$ , $m \in \mathbb{R}$ . Determinați $m \in \mathbb{R}$ astfel încât dreptele $AB$ și $CD$ să fie perpendiculare.<br>A. $m = 1$ B. $m = 9$ C. $m = 3$ D. $m = -3$ .                               |
| 5p | 6. Fie triunghiul $ABC$ , cu laturile $AB = 4$ , $AC = 11$ , respectiv $BC = 9$ . Atunci sinusul unghiului $B$ este egal cu:<br>A. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ B. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ C. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ D. $-\frac{\sqrt{8}}{3}$ .                                                                                 |

## SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

|    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|----|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|    | 1. Se consideră mulțimea matricelor $G = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} 1+2x & -x \\ 4x & 1-2x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .                                                                                                                                       |
| 5p | a) Să se arate că $A(x) \cdot A(y) = A(x+y)$ , $\forall x, y \in \mathbb{R}$ .                                                                                                                                                                                                                                         |
| 5p | b) Să se arate că mulțimea $G$ formează un grup abelian în raport cu înmulțirea matricelor.                                                                                                                                                                                                                            |
| 5p | c) Calculați $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}^{2025}$ .                                                                                                                                                                                                                                                 |
|    | 2. Se consideră polinomul $f = X^3 + mX^2 + X - p$ , unde $m, p \in \mathbb{R}$ , cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ , matricea $A = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{pmatrix}$ , și șirul $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definit prin $s_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n$ . |
| 5p | a) Să se arate că $A^T \cdot A = \begin{pmatrix} s_4 & s_3 & s_2 \\ s_3 & s_2 & s_1 \\ s_2 & s_1 & s_0 \end{pmatrix}$ .                                                                                                                                                                                                |
| 5p | b) Să se determine $s_3$ în funcție de parametrii $m$ și $p$ .                                                                                                                                                                                                                                                         |
| 5p | c) Să se arate că $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ dacă și numai dacă $\det(A^T \cdot A) \geq 0$ .                                                                                                                                                                                                                       |

1. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3} - a(x + 1)$ , unde  $a$  este un număr real.
- 5p a) Să se calculeze  $f''(x)$ .
- 5p b) Să se determine numărul real  $a$  pentru care tangenta la graficul funcției  $f$  în punctul de abscisă  $x = -2$ , situat pe graficul funcției  $f$ , este paralelă cu axa  $Ox$ .
- 5p c) Arătați că, pentru orice  $a \in \mathbb{R}$ , graficul funcției  $f$  admite asimptotă spre  $+\infty$ .
2. Se consideră șirul  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  definit prin  $a_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} \cdot \sqrt{2n+1}$  și șirul  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , definit prin  $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx$ ,  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^n dx$ ,  $n \geq 1$ .
- 5p a) Folosind metoda integrării prin părți, să se arate că  $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ .
- 5p b) Demonstrați că  $I_{2n+1} = 2 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \dots \cdot \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{1}{2n+1}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .
- 5p c) Arătând eventual că are loc  $(a_n)^2 = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , să se demonstreze că  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ .